Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir es mit Zufallsexperimenten zu tun. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, bezeichnen wir mit P(A).

Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition nach *Laplace:*

$$P(A) = \frac{\textit{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Beispiel: Bei einmaligem Würfeln mit einem fairen Würfel ist P(6) = 1/6.

Rechenregeln:

$0 \le P(A) \le 1$	(das *unmögliche Ereignis* hat die Wahrscheinlichkeit 0, das *sichere Ereignis* die Wahrscheinlichkeit 1)
P(A oder B) = P(A) + P(B), wenn A und B einander ausschließen	z.B.: P(5 oder 6) = 1/6 + 1/6 = 2/6
P(A') = 1 - P(A) (Gegenereignis: A' = "nicht A")	z.B.: P(nicht 6) = 1 - 1/6 = 5(6)
P(A und B) = P(A)·P(B), wenn A und B voneinander unabhängig sind	z.B.: bei 2maligem Würfeln ist P(2mal 6)= 1/6·1/6 = 1/36

Beispiele:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 2maligem Würfeln mindestens 1mal "6" zu werfen?
   Wir können die günstigen und möglichen Fälle abzählen (kompliziert) oder so überlegen:
   Die Wahrscheinlichkeit für "0mal 6" beträgt 5/6·5/6 = 25/36.
   "Mindestens 1mal 6" ist das Gegenereignis dazu, also
   P(mind. 1mal 6) = 1 - P(0mal 6) = 1 - 25/36 = 11/36.

2. Wie oft muss man mindestens würfeln, um mit 90% Wahrscheinlichkeit mindestens 1mal 6 zu werfen?
   Analog zum vorigen Beispiel erhält man bei n-maligem Würfeln
   P(mind. 1mal 6) = 1 - $(5/6)^n$
   Das soll 90% = 0,9 sein:
   $1 - (5/6)^n = 0{,}9$
   Durch Umformen und Logarithmieren erhalten wir
   $n = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(5/6)} = 12{,}6$
   d.h. man muss 13mal würfeln.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Unter der *bedingten Wahrscheinlichkeit* P(B|A) (B unter der Bedingung A) versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt, wenn man bereits weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist. Es gilt:

P(B|A) = P(A und B)/P(A)

Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt, wenn man bereits weiß, dass das Ereignis A eingetreten ist. Es gilt:

P(B|A) = P(A und B)/P(A)

(Das ist nur eine Abwandlung der Regel "günstige durch mögliche Fälle". Die möglichen Fälle sind jetzt nur mehr die, die zum Ereignis A gehören.)

Beispiele:

3. Die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln unter der Bedingung, dass das Ergebnis gerade ist, beträgt (1/6)/(1/2) = 1/3.

4. Ein Spieler hat schon viermal hintereinander eine 6 gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim fünften Wurf wieder eine 6 kommt?
P(5 mal 6|4 mal 6) = (1/6)^5/(1/6)^4 = 1/6, das heißt, die Wahrscheinlichkeit ist von den vorigen Würfen unabhängig. "Der Würfel hat kein Gedächtnis."

Manche Aufgaben können wir uns mit einem **Baumdiagramm** veranschaulichen (s.u.).
Die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Weges werden *multipliziert.*
Kann man das gewünschte Ergebnis auf mehrere Arten erhalten, werden die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Wege *addiert*.

Beispiel:

Eine Urne enthält 3 rote und 6 blaue Kugeln. Es wird 3mal je eine Kugel gezogen.

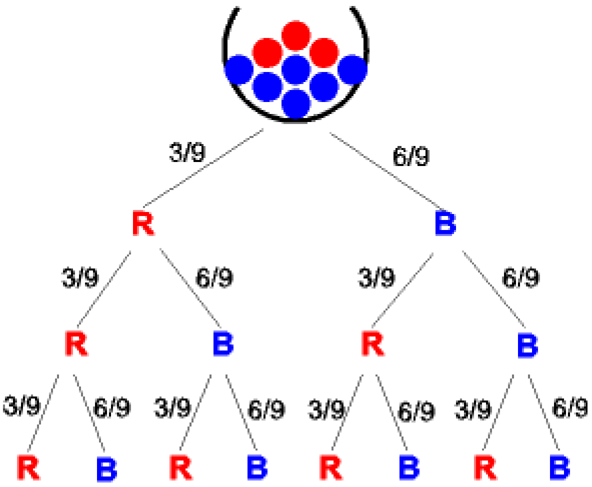
Ziehen mit Zurücklegen:

P(0 mal R) = P(BBB) = 6/9·6/9·6/9 = 8/27 = 0,296

P(1 mal R) = P(RBB) + P(BRB) + P(BBR) =
= 3/9·6/9·6/9 + 6/9·3/9·6/9 + 6/9·6/9·3/9 = 4/9 = 0,444

P(2mal R) = P(RRB) + P(RBR) + P(BRR) =
= 3/9·3/9·6/9 + 3/9·6/9·3/9 + 6/9·3/9·3/9 = 2/9 = 0,222

P(3mal R) = P(RRR) = 3/9·3/9·3/9 = 1/27 = 0,037

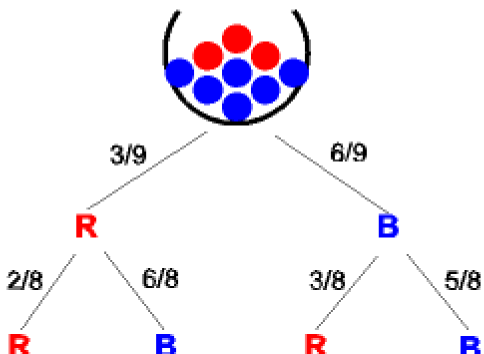


Ziehen ohne Zurücklegen:

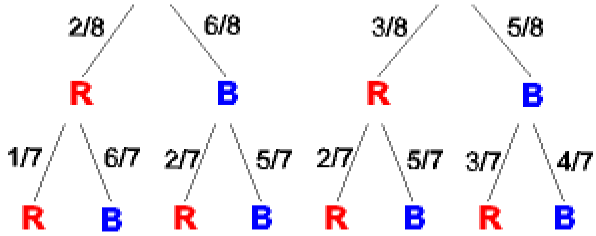
P(0 mal R) = P(BBB) = 6/9·5/8·4/7 = 5/21 = 0,238

P(1mal R) = P(RBB) + P(BRB) + P(BBR) =
= 3/9·6/8·5/7 + 6/9·3/8·5/7 + 6/9·5/8·3/7 = 15/28 = 0,536

P(2mal R) = P(RRB) + P(RBR) + P(BRR)



6/9·5/8·3/7 = 15/28 = 0,536



P(2mal R) = P(RRB) + P(RBR) + P(BRR) =
= 3/9·2/8·6/7 + 3/9·6/8·2/7 + 6/9·3/8·2/7 = 3/14 = 0,214

P(3mal R) = P(RRR) = 3/9·2/8·1/7 = 1/84 = 0,012