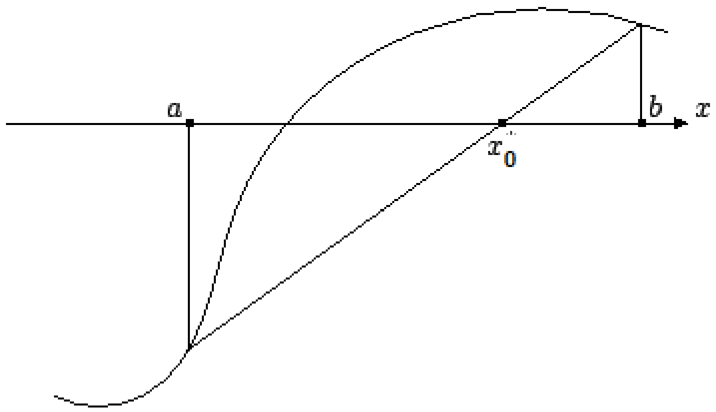
Regula Falsi

Die Idee der Regula Falsi ist eigentlich recht leicht: Man verschafft sich zunächst (etwa durch einen Graphen) eine Information über die ungefähre Lage der Nullstelle. Dann bestimmt man (möglichst in der Nähe der Nullstelle) eine Stelle a mit y(a) < 0 sowie eine Stelle b mit y(b) > 0. Durch a und b hat man nun die Nullstelle gewissermaßen eingeschachtelt. Nun führt man wiederholt ein Verfahren aus, das einem eine immer bessere Einschachtelung der Nullstelle verschafft, bis man diese für das vorliegende Problem hinreichend genau angenähert hat. Dazu verfährt man folgendermaßen. Die Sekante von f durch die Punkte (a, y(a)) und (b, y(b)) schneidet die x-Achse in einem Punkt x0.



Man berechnet zunächst die Stelle x0 gemäß $x_0 = a - y(a) \cdot \frac{b - a}{y(b) - y(a)}$

Nun bestimmt man y(x0). Ist dieser Wert positiv, so verwendet man im nächsten Schritt a und x0, ansonsten x0 und b, um das Verfahren erneut durchzuführen. Dies wiederholt man nun so lange, bis sich durch erneute Anwendung des Verfahrens hinreichend viele Stellen (wie viele genau, hängt von der durch die Problemstellung geforderten Genauigkeit ab) der zuletzt bestimmten Näherungslösung nicht mehr ändern.

Hier noch einmal eine Zusammenfassung der Vorgehensweise:

1. Man verschaffe sich eine ungefähre Vorstellung von der Lage der Nullstelle (z.B. durch einen Graphen).
2. Man finde a mit y(a) < 0 und b mit y(b) > 0.
3. Man berechne den Wert
4. Man bestimme y(x0). Ist dieser Wert Null, so ist x0 Nullstelle (und man ist fertig).

Ist er positiv, so vergleiche man b und x0. Stimmen diese beiden Werte hinreichend genau überein, so ist x0 eine Näherungslösung, andernfalls wiederhole Schritt 3 mit b = x0. Ist y(x0) negativ, so wiederhole Schritt 3 mit a = x0, falls a und x0 nicht hinreichend genau übereinstimmen.

Beispiel :

$y(x) := x^2 - 2$

Probieren : $a := 1$ $b := 2$ $y(a) = -1$ $y(b) = 2$

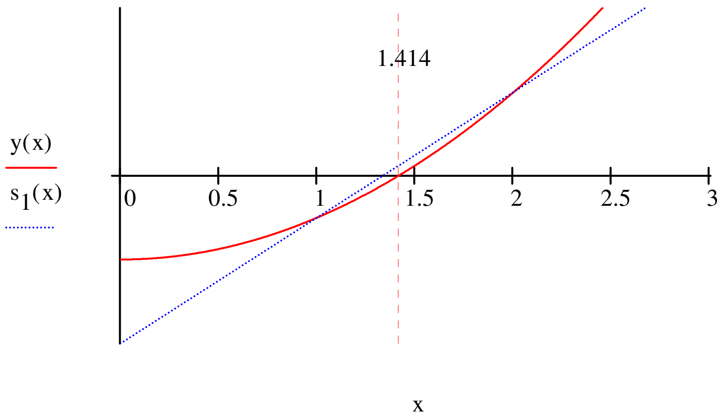
Die Sekante dazu : $s_1(x) := \dfrac{(y(a)\cdot x - y(a)\cdot b - y(b)\cdot x + y(b)\cdot a)}{a - b}$

Einige weitere Punkte zur Konstruktion des Graphen:

$y(0) = -2$

$y(1.5) = 0.25$

$y(2.5) = 4.25$



y(a)<0 y(b)>0 daher

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)}$ $x_0 = 1.3333333333$

daher $a := x_0$ $y(x_0) = -0.2222222222$

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)}$

$x_0 = 1.4$

daher $a := x_0$

$y(x_0) = -0.04$

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)}$

daher $b := x_0$ $x_0 = 1.4142259414$

$y(x_0) = -0.007$

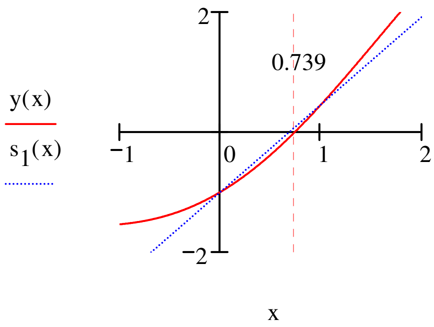
$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)}$

Beispiel :

$y(x) := x - \cos(x) \qquad a := 0 \qquad b := 1 \qquad y(a) = -1 \qquad y(b) = 0.4596977$

Die Sekante dazu : $s_1(x) := \dfrac{(y(a)\cdot x - y(a)\cdot b - y(b)\cdot x + y(b)\cdot a)}{a - b}$

Einige weitere Punkte zur Konstruktion des Graphen:



$y(0) = -1$

$y(0.5) = -0.3775825619$

$y(1.5) = 1.4292627983$

y(a)<0 y(b)>0 daher

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)} \qquad x_0 = 0.6850733573 \qquad y(x_0) = -0.0892992765$

daher $a := x_0$

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)} \qquad x_0 = 0.7362989976 \qquad y(x_0) = -0.005$

daher $a := x_0$

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)} \qquad x_0 = 0.738945356 \qquad y(x_0) = -0.0002$

daher $b := x_0$

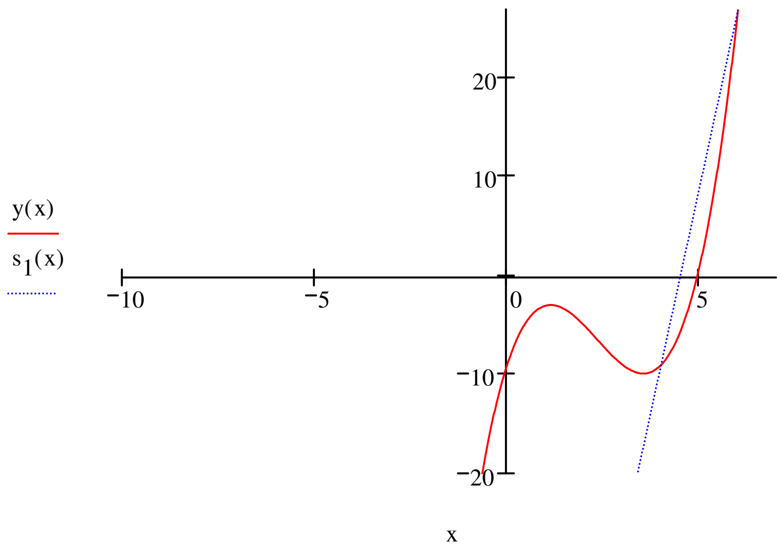
$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)} \qquad x_0 = 0.7390852193 \qquad y(x_0) = 0$

Beispiel :

$y(x) := x^3 - 7x^2 + 12x - 9$

Probieren : $a := 4$ $b := 6$ $y(a) = -9$ $y(b) = 27$

Die erste Sekante dazu : $s_1(x) := \dfrac{(y(a)\cdot x - y(a)\cdot b - y(b)\cdot x + y(b)\cdot a)}{a - b}$



y(a)<0 y(b)>0 daher

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)}$ $x_0 = 4.5$ $y(x_0) = -5.625$

daher $a := x_0$

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)}$ $x_0 = 4.7586206897$

daher $a := x_0$ $y(x_0) = -2.6514002214$

$x_0 := a - y(a)\cdot\dfrac{b - a}{y(b) - y(a)}$ $x_0 = 4.8696236559$ $y(x_0) = -1.083$

daher $a := x_0$

$$x_0 := a - y(a)\cdot\frac{b-a}{y(b)-y(a)}$$ $x_0 = 4.9132014619$ $y(x_0) = -0.416$

daher $a := x_0$

$$x_0 := a - y(a)\cdot\frac{b-a}{y(b)-y(a)}$$ $x_0 = 4.9296904603$ $y(x_0) = -0.156$

daher $a := x_0$

$$x_0 := a - y(a)\cdot\frac{b-a}{y(b)-y(a)}$$ $x_0 = 4.9358413875$ $y(x_0) = -0.058$

daher $a := x_0$

$$x_0 := a - y(a)\cdot\frac{b-a}{y(b)-y(a)}$$ $x_0 = 4.9381236308$ $y(x_0) = -0.022$

daher $a := x_0$

$$x_0 := a - y(a)\cdot\frac{b-a}{y(b)-y(a)}$$ $x_0 = 4.9389687501$ $y(x_0) = -0.008$

daher $a := x_0$

$$x_0 := a - y(a)\cdot\frac{b-a}{y(b)-y(a)}$$ $x_0 = 4.9392814684$ $y(x_0) = -0.003$