ZAKA

Integral Partialbruchzerlegung 2 Beispiele und Lösungen der Übungsbeispiele

$$\int \frac{x^3 - 5\cdot x^2 + x + 4}{x^2 - 7\cdot x + 10}\, dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x + 2\cdot \ln(x-2) + 3\cdot \ln(x-5)$$

Wie geht das ?
Wenn die Ordnung des Zählerpolynom größer oder gleich der des Nennerpolynoms ist, muss man zuerst algebraisch dividieren. Hier ist die Ordnung des Zählerpolynoms 3, die des Nennerpolynoms 2.

$$\left(x^3 - 5\,x^2 + x + 4\right) : \left(x^2 - 7x + 10\right) = x + 2 + \tfrac{5\,x - 16}{x^2 - 7x + 10}$$
$$\underline{-\left(x^3 - 7x^2 + 10\,x\right)}$$
$$2\,x^2 - \quad 9\,x + 4$$
$$\underline{-\left(2\,x^2 - \quad 14\,x + 20\right)}$$
$$5\,x - 16$$

Rest

Der Rest ergibt einen echten Bruch, also OrdnungZP < OrdnungNP. Nun wählt man den Lösungsansatz:

$$\frac{5\cdot x - 16}{x^2 - 7\cdot x + 10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A\cdot x - 5\cdot A + B\cdot x - 2\cdot B)}{(x-2)\cdot(x-5)}$$

... weil das Nennerpolynom die Lösungen 2 und 5 liefert:

$0 = x^2 - 7\cdot x + 10$ -> $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

Koeffizientenvergleich :

$A + B = 5$ Term mit x

$5\cdot A + 2\cdot B = 16$ Term ohne x

Also A=2 und B=16

Jetzt kann man zB mit Substitution integrieren: x-2=t und ebenso x-5=t . Daraus folgt:

$$\int \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-5}\, dx \rightarrow 2\cdot \ln(x-2) + 3\cdot \ln(x-5)$$

dazu : $\int x + 2\, dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x$

ergibt die Lösung : $\boxed{2\cdot \ln(x-2) + 3\cdot \ln(x-5) + \left(\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x\right)}$

2. Beispiel:

$$\int \frac{7x^2 - 6x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx \rightarrow \frac{-2}{(x-1)} + 3\cdot\ln(x-1) + 4\cdot\ln(x+1)$$

Hier ist das ZP von vorn herein in der Ordnung niedriger als das Nennerpolynom, daher braucht man kein Polynomdivision, man kann gleich mit dem Koeffizienztenvergleich beginnen:

$$\frac{7\,x^2-6\,x+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x^2-1)+C(x^2-2\,x+1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{(B+C)\,x^2+(A-2\,C)x+(A-B+C)}{(x-1)^2(x+1)}$$

Daraus rechnet man mit Koeffizientenvergleich A,B und C aus:

$$\begin{array}{l} B + C = 7 \\ A - 2\,C = -6 \\ A - B + C = 3 \end{array}$$

Hier stehen die Koeff. mit x²

Hier stehen die Koeff. mit x

Hier stehen die Koeff. ohne x

A = 2, B = 3 und C = 4.

Mit der Substitutionsmethode berechnet man die Einzelintegrale

$$\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{2}{t^2}\,dt \qquad \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx \rightarrow \frac{-2}{(x-1)}$$

insgesamt also:

$$\frac{-2}{(x-1)} + 3\cdot\ln(x-1) + 4\cdot\ln(x+1)$$

Einige Lösungen :

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx \rightarrow \operatorname{atanh}(x)$$

$$\int \frac{5+x}{x+x^2}\,dx \rightarrow 5\cdot\ln(x) - 4\cdot\ln(x+1)$$

$$\int \left(\frac{1}{-4+x^2}\right)dx \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\ln(x-2) - \frac{1}{4}\cdot\ln(x+2)$$

$$\int \frac{-8+5x}{-8-2x+x^2}\,dx \rightarrow 3\cdot\ln(x+2) + 2\cdot\ln(x-4)$$

$$\int \frac{7-10\cdot x-7\cdot x^2+16\cdot x^3+12\cdot x^4}{-6-x+x^2}\,dx \rightarrow 4\cdot x^3 + 14\cdot x^2 + 93\cdot x - \frac{42}{5}\cdot\ln(x+2) + \frac{1332}{5}\cdot\ln(x-3)$$

$$\int \frac{-1+3\cdot x-5\cdot x^2-2\cdot x^3+5\cdot x^4}{12-4x-3x^2+x^3}\,dx \rightarrow \frac{5}{2}\cdot x^2 + 13\cdot x - \frac{49}{4}\cdot\ln(x-2) + \frac{314}{5}\cdot\ln(x-3) + \frac{69}{20}\cdot\ln(x+2)$$

$$\int \frac{43+74\cdot x-27\cdot x^2-5\cdot x^3+2\cdot x^4}{36-15x-2x^2+x^3}\,dx \rightarrow x^2 - x + 3\cdot\ln(x+4) - \frac{7}{(x-3)} - 2\cdot\ln(x-3)$$