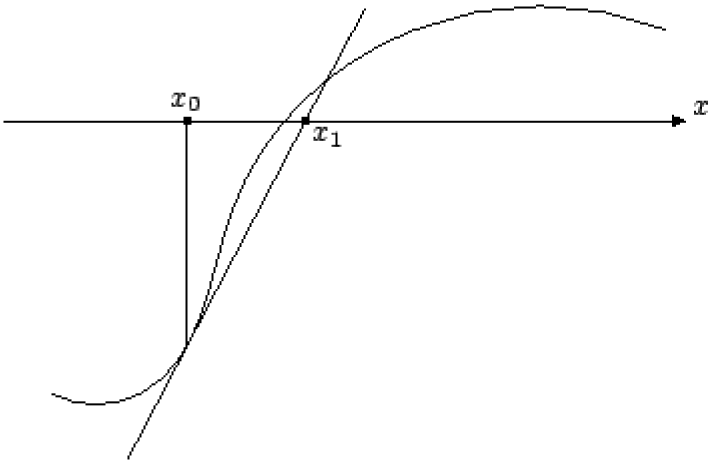
Newton Näherung

Im Gegensatz zur Regula Falsi besteht beim Newtonverfahren die grundlegende Idee darin, die gegebene Funktion in der Nähe der gesuchten Nullstelle durch eine Tangente (gegenüber einer Sekante bei der Regula Falsi) anzunähern und dann die Nullstelle der Tangente als neue Approximation der Nullstelle der Funktion zu nutzen.



Das Vorgehen ist nun wie folgt: Man verschaffe sich zunächst, z.B. durch einen Graphen, eine ungefähre Vorstellung von der Lage der Nullstelle und wähle eine erste Näherung x0 (d.h. man wähle eine Stelle in der Nähe der Nullstelle). Nun bestimme man die Nullstelle x1 der Tangente in x0 und wiederhole dieses Vorgehen mit x1 als neuem Ausgangswert. Die Bestimmung von x1 erfolgt gemäß der Formel $x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$

Nun berechnet man genauso x2, x3, ... Man beendet das Verfahren, falls der neue Wert sich vom alten hinreichend wenig unterscheidet (die Genauigkeit hängt von der Problemstellung ab).

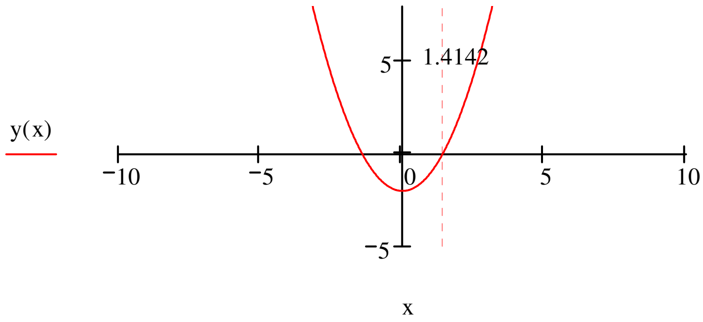
Hier noch einmal eine Zusammenfassung der Vorgehensweise:

Man verschaffe sich (z.B. durch einen Graphen) eine erste Näherung x0 für die Nullstelle.
Man berechne (beginnend bei n = 0) aus xn die neue Näherung xn+1 gemäß

$$x_n + 1 = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$$

Unterscheiden sich xn und xn+1 hinreichend wenig, so ist xn+1 eine Näherung der gesuchten Nullstelle, ansonsten wiederhole man Schritt 2 für das nächste n.

Beispiel $\quad y(x) := x^2 - 2 \quad\quad y'(x) := 2 \cdot x$



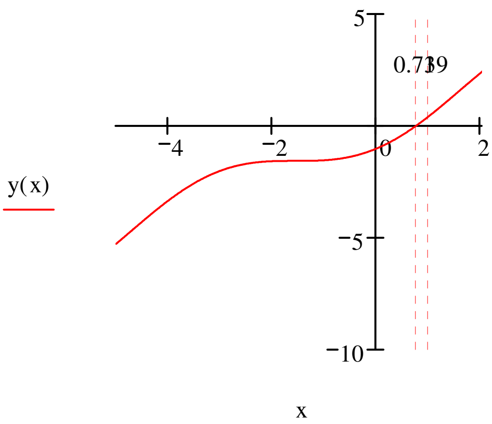
$$x_1 := x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} \qquad x_1 = 1.5 \qquad n := 0..5 \qquad x_{n+1} := x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)}$$

$x_n =$

1
1.5
1.4167
1.4142
1.4142
1.4142

Beispiel $\quad y(x) := x - \cos(x) \quad\quad y'(x) := 1 + \sin(x) \quad\quad x := -5, -4.99..5$

$x_0 := 1 \qquad n := 0..5$



$$x_{n+1} := x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)}$$

$x_n =$

1
0.7504
0.7391
0.7391
0.7391
0.7391