Komplexes Multiplizieren, Dividieren, Moivresche Formel

Multiplizieren , Dividieren

Beispiele:

$u := 1 + j \qquad v := -1 + \sqrt{3}\cdot j$

Zunächst Umrechnen in Polarkoordinaten:

Die Beträge:

$U := |u| \qquad U = 1.414 \qquad V := |v| \qquad V = 2$

Die Winkel in Radiant:

$\phi_u := \arg(u) \qquad \phi_u = 0.25\,\pi \qquad \phi_v := \arg(v) \qquad \phi_v = 0.667\,\pi$

Multiplizieren heißt also: Beträge multiplizieren, Winkel addieren

$z := u\cdot v \qquad z = -2.732 + 0.732i$ Das soll herauskommen!

Nun gerechnet:

$U\cdot V = 2.828 \qquad \phi_u + \phi_v = 0.917\,\pi$

Rückführen zu kartesischer Schreibweise:

$z := U\cdot V\cdot\left(\cos\left(\phi_u + \phi_v\right) + j\cdot\sin\left(\phi_u + \phi_v\right)\right)$

$z = -2.732 + 0.732i$

Dividieren heißt also: Beträge dividieren, Winkel subtrahieren

$z := \frac{u}{v} \qquad z = 0.183 - 0.683i$ Das soll herauskommen!

Nun gerechnet:

$\frac{U}{V} = 0.707 \qquad \phi_u - \phi_v = -0.417\,\pi$

$z := \frac{U}{V}\cdot\left(\cos\left(\phi_u - \phi_v\right) + j\cdot\sin\left(\phi_u - \phi_v\right)\right)$

$z = 0.183 - 0.683i$

Moivresche Formel

$$(\cos(\phi) + j\cdot\sin(\phi))^n = \cos(n\cdot\phi) + j\cdot\sin(n\cdot\phi)$$

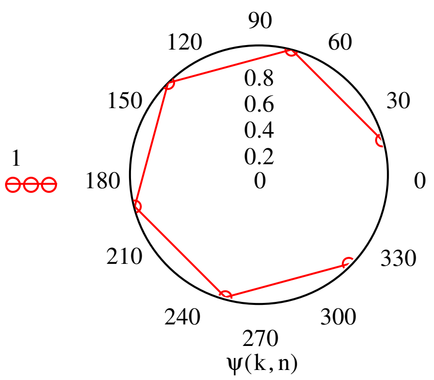
Grundsätzlich ist der Winkel einer komplexen Zahl wie der Logarithmus zu rechnen: "Hoch n" wird zu n mal ϕ . Die n-te Wurzel => 1/n mal ϕ .
Wenn man Wurzel zieht, muss man immer mehrere Lösungen berücksichtigen, denn alle diese Lösungen würden exponentiert das gleich Ergebnis liefern. Die n-te Wurzel liefert also n Ergebnisse.

$x^4 = 16$ Lösungen : $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2\cdot i \\ -2\cdot i \end{pmatrix}$

Eine Winkelfunktion ist immer mehrdeutig: $\phi=\phi+2k\pi$. Uns interessieren nur die Winkel, die durch Wurzelziehen innerhalb $-\pi$ bis π (-180° bis 180°) liegen. Daher gehen wir von k=0...n-1 aus. Wenn diese Winkel durch n dividiert werden, liegen die Ergebnisse alle im 2π Kreis. Sie bilden ein regelmäßiges n-Eck.

$\phi := \frac{\pi}{2}$ $n := 6$ $\psi(k,n) := \frac{\phi + 2\cdot k\cdot\pi}{n}$ $k := 0..n-1$

$\psi(0,n) = 0.083\pi$



$\psi(1,n) = 0.417\pi$

$\psi(2,n) = 0.75\pi$

$\psi(3,n) = 1.083\pi$

Die Lösungen sind also [1,π/12] , das sind 15°, usw. (siehe Skriptum).