Studienberechtigung TU

Integrale: Lösungen von Übungsbeispielen:
I 1 3 . Eine Polynomfunktion 3 .Grades mit der Gleichung $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Punkt P(2 / 3) und hat den Tiefpunkt T (1 / 1). In ihrem Wendepunkt wird sie von einer Parabel mit der Gleichung $y = px^2 + qx + r$ berührt, deren Scheitelpunkt an der Stelle -1 liegt. Diskutiere beide Kurven und berechne den Flächeninhalt des endlichen Flächenstücks, das von beiden Kurven begrenzt wird! (Fertige eine Skizze an!)

Zunächst berechnen wir die benötigten Ableitungen des Polynoms und der Parabel

$$\frac{d}{dx}y_{pol} = 3\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c \qquad \frac{d^2}{dx^2}y_{pol} = 6\cdot x + 2\cdot b$$

$$\frac{d}{dx}y_{par} = 2\cdot p\cdot x + q$$

Nun setzen wir die bekannten Punktkoordinaten in die Gleichungen der Kurven ein, zunächst die Parabel:

Im Scheitel ist der Anstieg 0: $0 = 2\cdot p\cdot -1 + q$ ---> $q = 2p$

Nun die Gleichungen, die wir vom Polynom aufbauen können:

$3 = 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d$ Punkt eingesetzt

$1 = 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d$ Tiefpunkt eingesetzt

$0 = 3\cdot 1 + 2\cdot b\cdot 1 + c$ Im Tiefpunkt ist der Anstieg 0

Der Wendepunkt (xw, yw) ist noch nicht bekannt, die Krümmung (2.Ableitung) ist dort 0

$$0 = 6\cdot x_w + 2\cdot b$$

Der Anstieg der beiden Kurven ist im Wendepunkt gleich:

$2\cdot p\cdot x_w + q = 3\cdot x_w^2 + 2\cdot b\cdot x_w + c$ oder mit q=2p $2\cdot(x_w + 1)\cdot p = 3\cdot x_w^2 + 2\cdot b\cdot x_w + c$

Nun haben wir 5 Gleichungen und 5 Unbekannte, das Gleichungssystem läßt sich also lösen:

given

$$3 = 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d$$
$$1 = 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d$$
$$0 = 3\cdot 1 + 2\cdot b\cdot 1 + c$$
$$0 = 6\cdot x_w + 2\cdot b$$

$$2\cdot(x_w + 1)\cdot p = 3\cdot x_w^2 + 2\cdot b\cdot x_w + c$$

$$\mathrm{find}(b, c, d, x_W, p) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{10} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

Das Computeralgebraprogramm löst diese Gleichungen im Handumdrehen, das Ergebnis ist:

$b := -2 \qquad c := 1 \qquad d := 1 \qquad x_W := \frac{2}{3}$

Daraus folgt $q := \frac{-2}{10}$ $\qquad p := \frac{-1}{10}$

Nun brauchen wir noch den Koeffizienten r.

Wir bestimmen zunächst den Wendepunkt

$$y_W := \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1\cdot\frac{2}{3} + 1 \qquad y_W = \frac{29}{27}$$

Nun berechnen wir r:

$$\frac{29}{27} = \frac{-1}{10}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{3} + r \qquad r = \frac{169}{135}$$

Jetzt sind beide Kurven bekannt

$$y_{pol}(x) := x^3 - 2x^2 + x + 1 \qquad y_{par}(x) := -\frac{x^2}{10} - \frac{2}{10}\cdot x + \frac{169}{135}$$

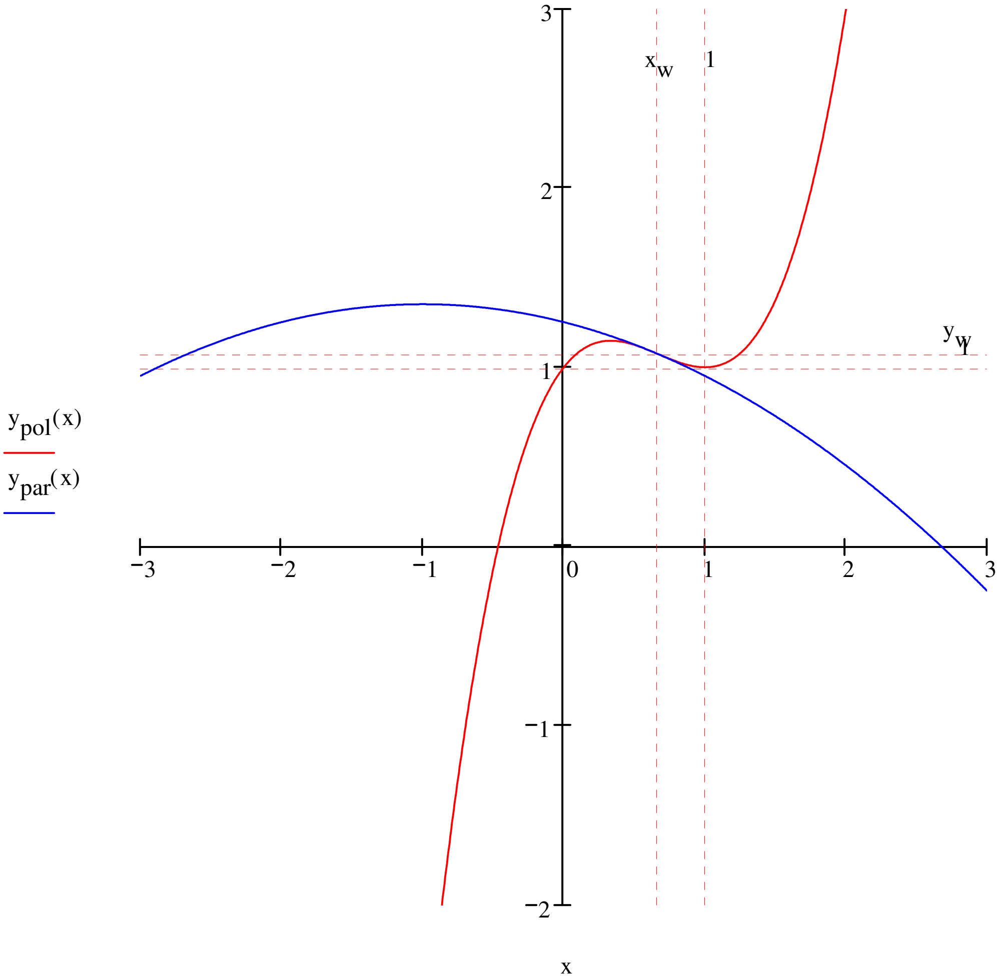
Um sie zu zeichnen wird man außer dem TP und dem WP die Nulldurchgänge der x-Achse (siehe unten bei der Flächenberechnung) und der y-Achse ermitteln.

$x = 0 \qquad y_{pol}(0) = 1 \qquad y_{par}(0) = 1.25$

Man kann auch noch den Hochpunkt des Polynoms ermitteln:

$0 = 3x^2 - 4x + 1 \qquad x_{HP} := \frac{1}{3} \qquad x_{TP} = 1$ wie angegeben!

$y_{HP} := x_{HP}^3 - 2x_{HP}^2 + x_{HP} + 1 \qquad y_{HP} = 1.15$



Nun muss auch noch die Fläche, die die Kurven einschließen, berechnet werden. dazu bestimmen wir die x-Werte für ypol=0 und ypar=0 :

$$x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 = 0$$

Es gibt nur eine relle Lösung: $x = -0.466$

Lösung durch pobieren:

$x := 1$	$x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 = 1$	geht nicht
$x := -1$	$x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 = -3$	geht nicht
$x := \frac{-1}{2}$	$x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 = -0.13$	schon besser
$x := \frac{-1}{4}$	$x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 = 0.61$	zu viel

$x := \frac{-3}{8}$ $\qquad x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 = 0.29$ zu viel

$x := \frac{-7}{16}$ $\qquad x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 = 0.1$ zu viel

$x := \frac{-15}{32}$ $\qquad x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1 = -0.01$ das können wir nehmen

Nun die rechte Begrenzung:

$$\frac{-1}{10}\cdot x^2 - \frac{2}{10}\cdot x + \frac{169}{135} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{9}\cdot\sqrt{1095} \\ -1 - \frac{1}{9}\cdot\sqrt{1095} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.68 \\ -4.68 \end{pmatrix} \qquad x_1 = -4.68 \qquad x_2 = 2.68$$

Als rechte Begrenzung der Fläche kommt nur x2 in Frage

Die Fläche A , die von den beiden Kurven umrandet wird, ist daher:

$$A := \int_{-0.466}^{x_w} x^3 - 2\cdot x^2 + x + 1\,dx + \int_{x_w}^{2.68} \frac{-1}{10}\cdot x^2 - \frac{2}{10}\cdot x + \frac{169}{135}\,dx$$

$A = 2.23$