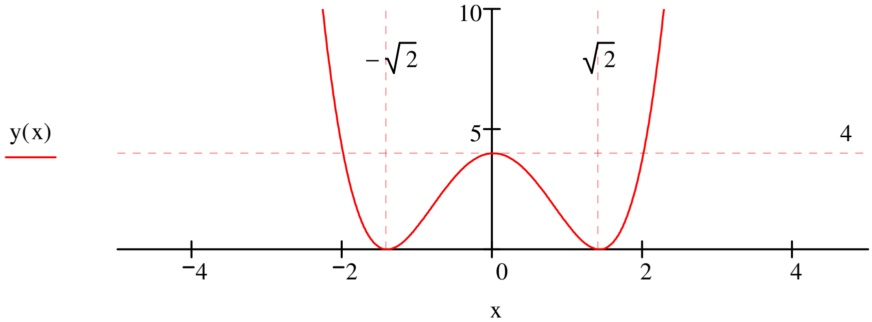
Studienberechtigung TU

Integrale Lösungen von Übungsbeispielen:

I 1 0 . Berechne den Flächeninhalt jenes Flächenstücks, das die Abszisse (x -Achse) von der angegebenen Kurve abschneidet!

(c)

$y(x) := x^4 - 4\cdot x^2 + 4$



Zuertrst die x berechnen, bei denen y Null ist

$0 = x^4 - 4\cdot x^2 + 4$ Substituieren z=x²

$0 = z^2 - 4\cdot z + 4$ $z_1 = 2$ $z_2 = 2$

daher : $x_{11} = \sqrt{2}$ $x_{12} = -\sqrt{2}$ $x_{21} = \sqrt{2}$ $x_{22} = -\sqrt{2}$

y(x) hat also 2 Doppelpunkte $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$. Zum Zeichnen des Graphen suchen wir noch den y-Wert für x=0. eine Kurve 4.ter Ordnung muss immer 4 Nullstellen haben!

$y(0) = 4$

Wenn wir nun die erst Ableitun null setzen, bekommen wir die Tief- bzw. Hochpunkte:

$y'(x) := 4\cdot x^3 - 8\cdot x^2$ $4\cdot x^3 - 8\cdot x = 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Also ist (4,0) ein Hochpunkt und die beiden Doppelpunkte Tiefpunkte

Jetzt können Sie die 2 Doppelpunkte und den Punkt auf der y-Achse einzeichnen. Wenn Sie wissen wollen, wie die Krümmung in den Doppelpunkten verläuft, bilden Sie die zweite Ableitung und setzen für x ein:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4 - 4\cdot x^2 + 4\right) \rightarrow 12\cdot x^2 - 8$$

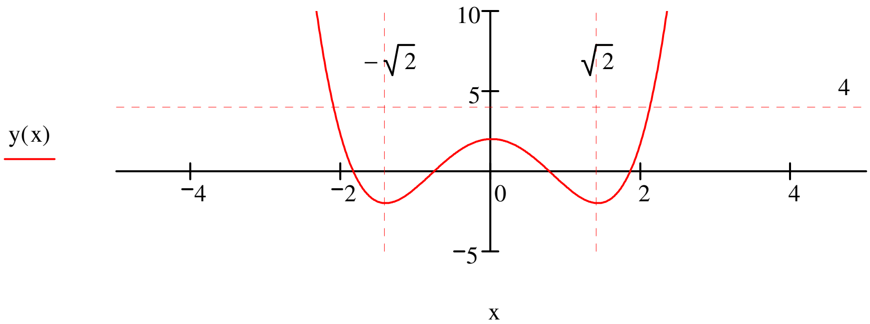
$$y''(x) := 12\cdot x^2 - 8 \qquad y''\left(-\sqrt{2}\right) = 16 \qquad y''\left(\sqrt{2}\right) = 16$$

Also positive Krümmung in den Doppelpunkten

Nun können Sie die Fläche zwischen den beiden Doppelpunkten und der x-Achse berechnen:

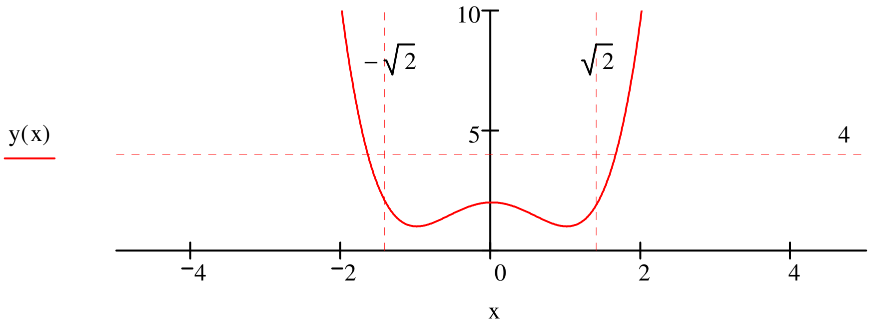
$$\boxed{\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^4 - 4\cdot x^2 + 4\, dx \rightarrow \frac{64}{15}\cdot\sqrt{2}}$$

Wenn die Kurve $y(x) := x^4 - 4\cdot x^2 + 2$ heißt , dann schaut sie übrigens so aus:



Sie hat dann 4 reelle Nullstellen.

Wenn die Kurve $y(x) := x^4 - 2\cdot x^2 + 2$ heißt , dann schaut sie übrigens so aus:



Sie hat dann nur komplexe Nullstellen