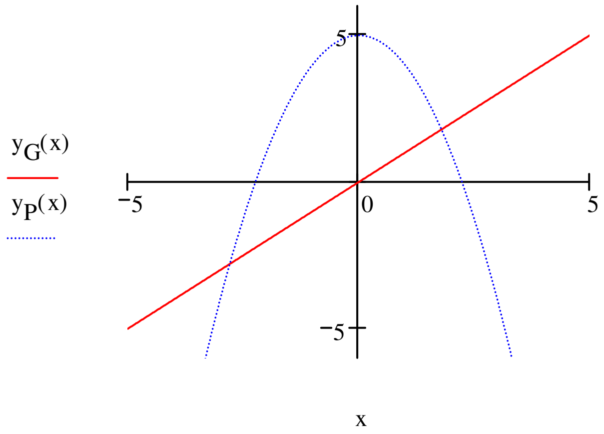
Analytische Geometrie

1) Die Gerade $y_G(x) := x$ schneidet die Parabel $y_P(x) := 5 - x^2$ in 2 Punkten.

a)Wo berührt die zu ihr parallele Tangente $y_T(x)$ die Parabel? Wie lautet Ihre Gleichung?

b) Wie groß ist der Abstand der beiden Geraden ?

c) Welche Fläche hat das Dreieck, dass aus den Schnittpunkten S1 und S2 und dem Berührungspunkt T aufgespannt wird?



Schnittpunkte :

$x = 5 - x^2$ $\qquad x_{S1} := \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}$ $\qquad x_{S2} := \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}$

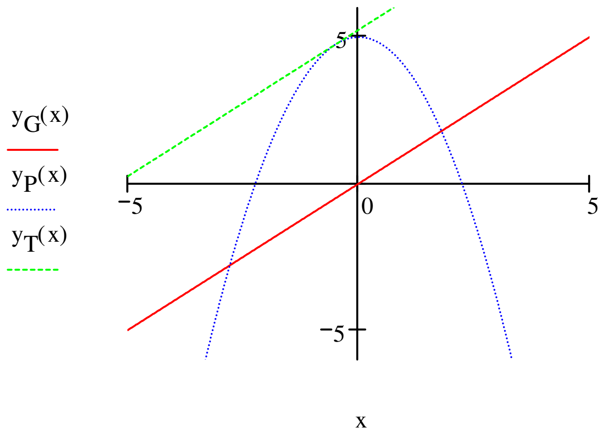
$y_{S1} := x_{S1}$ $\qquad y_{S2} := x_{S2}$ weil y=x

Tangente :

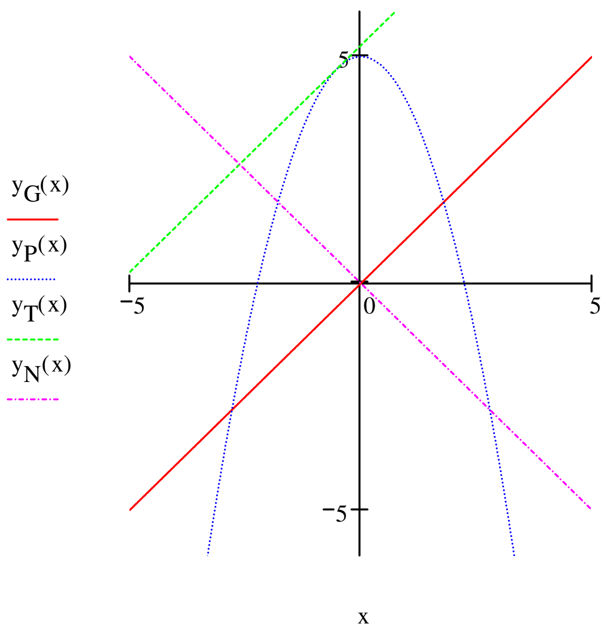
$\frac{d}{dx}y_P(x) \rightarrow -2\cdot x$ $\qquad$ Anstieg $k_G := 1$ $\qquad 1 = -2x$ $\qquad x_t := \frac{-1}{2}$

$y_P\left(\frac{-1}{2}\right) = 4.75$ $\qquad y_t := 4.75$ $\qquad k_t := k_G$

$y_t = k_t\cdot x_t + d$ $\qquad 4.75 = 1\cdot\frac{-1}{2} + d$ $\qquad d := 5.25$ $\qquad y_T(x) := k_t\cdot x + d$



Normale durch den Nullpunkt: $y_N(x) := \frac{-1}{k_G} \cdot x$



Schnittpunkte mit den parallelen Geraden:

$x_{SP1} := 0 \qquad y_{SP1} := 0$

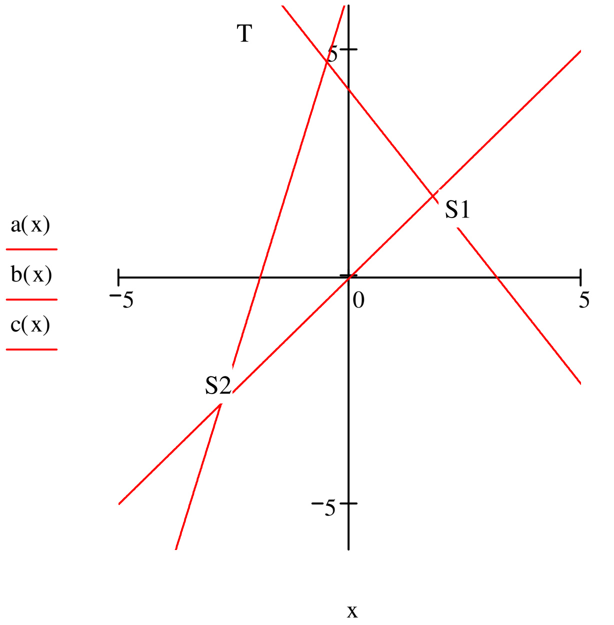
Berechnung des 2. Schnittpunktes (der Tangente mit der Normalen)

$$k_T \cdot x_{SP2} + d = \frac{-1}{k_G} \cdot x_{SP2}$$

$$x_{SP2} := \frac{-d}{\left(k_t \cdot k_G + 1\right)} \cdot k_G \qquad x_{SP2} = -2.625 \qquad y_{SP2} := \frac{-1}{k_G} \cdot x_{SP2} \qquad y_{SP2} = 2.625$$

Normalabstand : $d := \sqrt{\left(x_{SP2} - x_{SP1}\right)^2 + \left(y_{SP2} - y_{SP1}\right)^2} \qquad d = 3.712$

Fläche des Dreiecks [T,S1,S2]



$$A := \frac{1}{2}\cdot\left|\left|\begin{pmatrix} x_t - x_{S1} & x_t - x_{S2} \\ y_t - y_{S1} & y_t - y_{S2} \end{pmatrix}\right|\right| \qquad A = 12.029$$

Erklärung :Die beiden Vektoren TS1 und TS2 spannen ein Parallelogramm auf. Die Determinante Ihres Produktes ist seine Fläche. Die Hälfte davon ist ie Dreiecksfläche. Um keine negativen Ergebnisse zu erhalten wird die Determinante noch in Betragsstrichen gesezt.

$$a(x) := \frac{y_{S2} - y_{S1}}{x_{S2} - x_{S1}} \cdot \left(x - x_{S1}\right) + y_{S1}$$

$$b(x) := \frac{y_{S2} - y_t}{x_{S2} - x_t} \cdot \left(x - x_t\right) + y_t$$

$$c(x) := \frac{y_{S1} - y_t}{x_{S1} - x_t} \cdot \left(x - x_t\right) + y_t$$

$x_{S2} = -2.791$