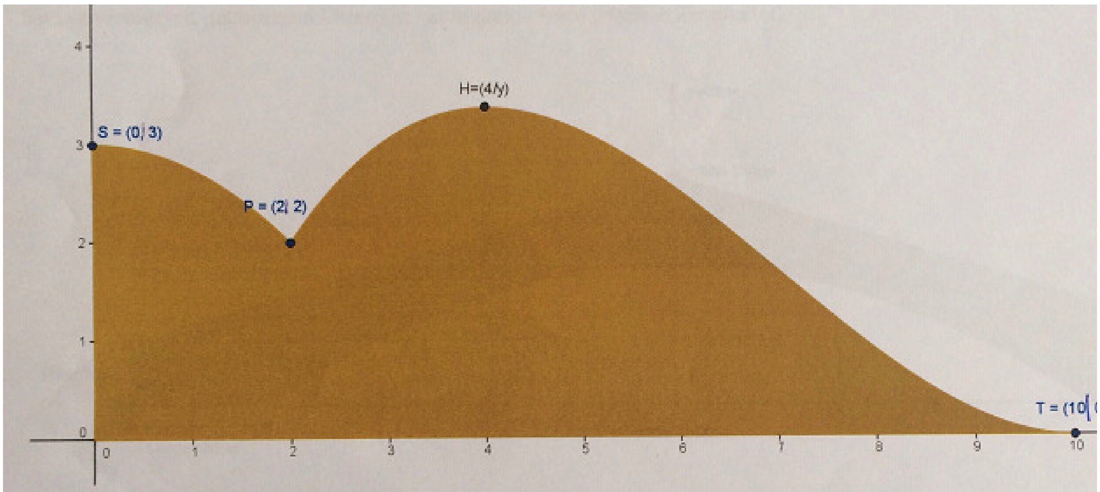


Kirchen haben oft einen Zwiebelturm. Dieses entsteht durch Rotation um die x-Achse.
Hier sind es:
1.) Eine Parabel mit Scheitel S=(0/3) und P=(2/2)
und 2.) ein Polynom 3. Grades mit: P=(2/2), Hochpunkt H=(4/y=?) und Tiefpunkt T=(10/0).
Alle Angaben in Meter.
a.) Bestimme die Funktionsgleichungen.
b.) Gib den größten Durchmesser des Dachs an. (Hinweis: y-Wert vom Hochpunkt x 2 – weil Durchmesser!!)
c.) Berechne das Volumen des Dachraumes.
d.) Berechne sowohl Volumsschwerpunkt, als auch den Flächenschwerpunkt von obiger Querschnittsfläche.

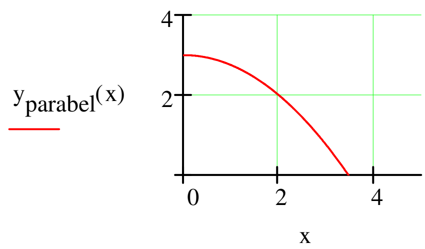
Parabelgleichung

Parabel Scheitel $S(0,3)$ Parabel Punkt $P(2,2)$

$$y_{parabel}(x) = a\cdot(x-0)^2 + 3$$

$$2 = a\cdot(2-0)^2 + 3 \qquad a := \frac{-1}{4}$$

$$y_{parabel}(x) := a\cdot(x-0)^2 + 3$$



$$A_{parabel} := \int_0^2 y_{parabel}(x)\,dx \qquad A_{parabel} = 5.333$$

$$V_{parabel} := \pi\cdot\int_0^2 y_{parabel}(x)^2\,dx \qquad V_{parabel} = 45.239$$

$$y_{pol}(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$\frac{d}{dx} y_{pol}(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$

HP (4,y)   TP (10,0)   Linke Grenze
: LGP: (2,2)

Berechnung der Polynomparameter aus den Angaben:

Given

TP :

$$0 = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

$$0 = 3 \cdot a \cdot 10^2 + 2 \cdot b \cdot 10 + c$$

HP

$$0 = 3 \cdot a \cdot 4^2 + 2 \cdot b \cdot 4 + c$$

LGP :

$$2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d$$

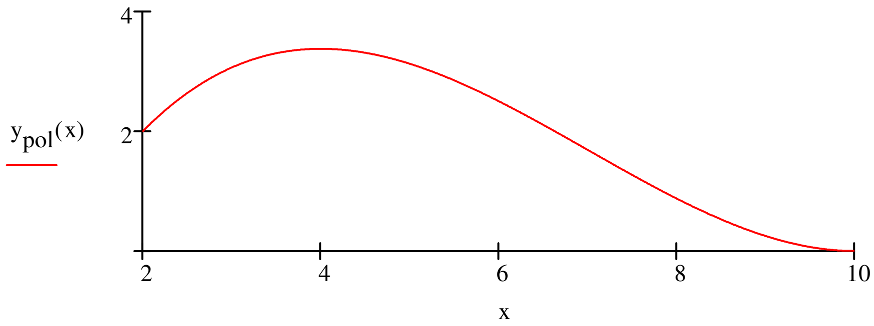
$$\text{Find}(a, b, c, d) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{32} \\ \frac{-21}{32} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{-25}{8} \end{pmatrix}$$

das sind die Koeffizienten des Polynoms 3. Ordnung

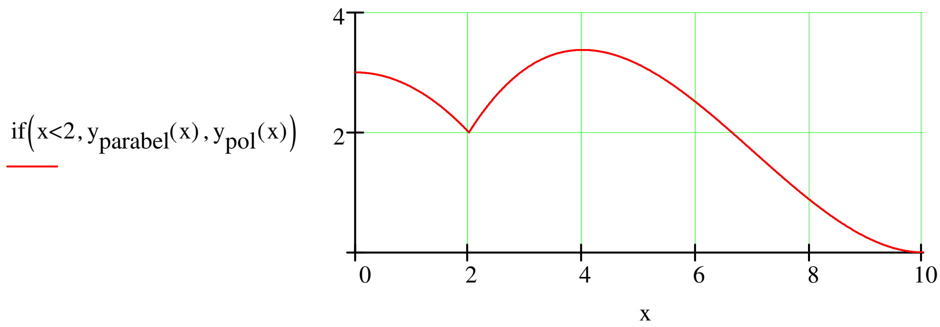
$$y_{pol}(x) := \frac{1}{32} \cdot x^3 - \frac{21}{32} \cdot x^2 + \frac{15}{4} \cdot x - \frac{25}{8}$$

... die Polynomfunktion

Größter Durchmesser: $y_{pol}(4) = 3.375$



Beide Kurven: Querschnitt durch den liegenden Zwiebelturm.



Rotationskörper :

$$V_{pol} := \pi \cdot \int_{2}^{10} y_{pol}(x)^2 \, dx$$

$V_{ges} := V_{pol} + V_{parabel}$ $\qquad V_{ges} = 180.238$

Schwerpunkt der dargestellten Querschnittsfläche

$$x_s := \int_0^2 x\cdot\left(\frac{-1}{4}\cdot x^2 + 3\right)dx + \int_2^{10} x\cdot\left(\frac{1}{32}\cdot x^3 - \frac{21}{32}\cdot x^2 + \frac{15}{4}\cdot x - \frac{25}{8}\right)dx$$

$$x_s = 81.8$$

$$y_s := \int_0^2 \left(\frac{-1}{4}\cdot x^2 + 3\right)^2 dx + \int_2^{10} \left(\frac{1}{32}\cdot x^3 - \frac{21}{32}\cdot x^2 + \frac{15}{4}\cdot x - \frac{25}{8}\right)^2 dx$$

$$y_s = 57.371$$

Volumensschwerpunkt

$$V := \left[\int_0^2 \left(\frac{-1}{4}\cdot x^2 + 3\right)^2 dx + \int_2^{10} \left(\frac{1}{32}\cdot x^3 - \frac{21}{32}\cdot x^2 + \frac{15}{4}\cdot x - \frac{25}{8}\right)^2 dx\right]\cdot\pi$$

$$x_{sV} := \frac{\int_0^2 x\cdot\left(\frac{-1}{4}\cdot x^2 + 3\right)^2 dx + \int_2^{10} x\cdot\left(\frac{1}{32}\cdot x^3 - \frac{21}{32}\cdot x^2 + \frac{15}{4}\cdot x - \frac{25}{8}\right)^2 dx}{V}\cdot\pi$$

$x_{sV} = 3.567$ $\quad$ $y_{sV} := 0$