FH-Studiengang Angewandte Elektronik, WS 2014/15

Übungsaufgaben zur Analysis I

3. Anwendungen der Differentialrechnung

71. Man beweise, dass $\ln(1 + x) < x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

    (Anleitung: Man bilde $f(x) = x - \ln(1 + x)$ und zeige, dass $f(0) = 0$ und f streng monoton wachsend ist.)

72. Wie ist t zu wählen, damit die Funktion $f(x) = (x^2 + t)/(x - t)$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend ist? Machen Sie eine Skizze.

73. Welches ist das maximale Volumen eines Zylinders, der einem geraden Kegel vom Radius R und der Höhe H eingeschrieben werden kann?

74. Ein Transportunternehmen wendet im Durchschnitt $K_1 = 40.000$,- € für die Generalüberholung eines seiner Fahrzeuge auf, während die laufenden Betriebskosten $K_2(x) = 3{,}8x + 4\cdot 10^{-6}x^2$ bei einer Fahrleistung von x km seit der letzten Überholung betragen. Man bestimme die durchschnittlichen Gesamtkosten pro km. Bei welchem Service-Intervall, d.h. bei welcher Fahrleistung seit dem letzten Generalservice sind diese Kosten am günstigsten?

75. Ein Weinhändler steht vor der Entscheidung, eine bestimmte Menge seine Vorrates entweder mit dem Erlös W_0 sofort zu verkaufen, oder aber eine bestimmte Zeit t abzuwarten, und erst dann mit einem höheren Erlös zu verkaufen. Die Wertentwicklung des Weines möge dabei durch die Funktion

    $$W(t) = W_0 e^{\sqrt{t}} e^{-rt}$$

    (d.i. der auf den Zeitpunkt t = 0 bezogene Verkaufserlös, welcher durch stetige Abzinsung mit der sogenannten Diskontrate $r > 0$ gebildet wird) beschrieben werden. Man bestimme den optimalen Verkaufszeitpunkt, d.h. jenen Zeitpunkt, zu dem der Verkaufserlös W(t) am größten ist

76. Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ im Intervall $I = [-\pi,\pi]$.

77. Man bilde zu folgenden Funktionen $y = f(x)$ das Differential dy an der Stelle x_0:

    (a) $f(x) = (7/2)x^3 - x$, $x_0 = 2$
    (b) $f(x) = 3/(x - 1)$, $x_0 = 3$
    (c) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi/3$

78. Beim Erwärmen einer Kugel mit dem Radius 20 cm wird (a) der Radius bzw. (b) der Durchmesser um ca. 1 mm größer. Wie groß ist dann ungefähr die Zunahme des Kugelvolumens?

79. Die Schwingungsdauer eines Pendel mit der Länge a beträgt annähernd $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ (dabei bezeichnet $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ die Erdbeschleunigung). Auf wie viele % genau kann man die Schwingungsdauer T angeben, wenn man die Pendellänge a auf 1% genau bestimmt?

80. – 82. Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

80. (a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin(2x)}{\sinh^2 x}$

81. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^5}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

82. (a) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt[3]{x^3-x^2})$

83. Gesucht ist eine in der Nähe von (a) $x_0 = 3$ bzw. (b) $x_0 = -3$ gelegene Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{-x} + x^2 - 10$.

84. Man berechne den numerischen Wert von $\sqrt{5}$ mit Hilfe des Babylonischen Wurzelziehens (siehe Vorlesung) auf 8 signifikante Stellen genau.

85. Nach welcher Zeit t (in Stunden) erreichen die Betriebskosten

$$B(t) = 10{,}45t + 0{,}0016t^2 + 17200(1 - e^{-0{,}0002t})$$

einer Maschine den Anschaffungspreis A = 100.000,- € ? Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

(Anleitung: Man bilde die Funktion $f(t) = B(t) - A$, untersuche deren Monotonieverhalten und bestimme schließlich die gesuchte Nullstelle mit Hilfe des Newton-Verfahrens.)