FH-Studiengang Angewandte Elektronik, WS 2014/15

Übungsaufgaben zur Analysis I

2. Grundlagen der Differentialrechnung

36. Bestimmen Sie ein Bildungsgesetz für die unendlichen Folgen:

    (a) 0,3; 0,09; 0,027; ... (b) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \ldots$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

    Wie groß ist dann das jeweils zehnte Folgenglied?

37. bis 39. Man untersuche nachstehende Folgen in Hinblick auf Monotonie, Beschränktheit, mögliche Häufungswerte bzw. Grenzwerte. Ferner veranschauliche man die Folgen auf der reellen Zahlengeraden:

37. (a) $-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -2, -\sqrt{5}, \ldots$ (b) 1, 1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 1/4, ..., m, 1/m, ...

38. (a) $x_n = \sin(2n\pi)$ (b) $x_n = 2/n^2$

39. (a) $x_n = \dfrac{n+5}{n-1}$ für $n \geq 2$ (b) $x_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$

40. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge (x_n) mit $x_1 = 5$ und $x_{n+1} = (x_n + 5/x_n)/2$ für n = 1,2,... . Man berechne die Folgenglieder x_n für n = 1,...,10, untersuche die Folge in Bezug auf Monotonie, Beschränktheit sowie Konvergenz und berechne – wenn möglich – den Grenzwert.

41. Zu folgenden konvergenten Zahlenfolgen bestimme man den Grenzwert:

    (a) $x_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 2n + 1}{2n^3 - 1}$ (b) $x_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$

    (Anleitung zu (b): Man verwende die Formel $a - b = (a^2 - b^2)/(a + b)$.)

42. Beweisen Sie: In einer arithmetischen Folge ist jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn, d.h. $x_n = (x_{n-1} + x_{n+1})/2$. Genauso ist in einer geometrischen Folge jedes Glied das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn, d.h. $x_n = \sqrt{x_{n-1} x_{n+1}}$. Illustrieren Sie diesen Sachverhalt auch an je einem Beispiel.

43. Man berechne die Summe der unendlichen geometrischen Reihen:

    (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 0{,}3^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

44. Gegeben seien die Punkte $P_0 = 0$ und $P_1 = 1$ auf der Zahlengeraden. Man halbiere nun fortgesetzt die Strecke $\overline{P_0P_1}$ in P_2, die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in P_3, $\overline{P_2P_3}$ in P_4, usw. und bestimme die Lage von P_n für $n \to \infty$.

45. Was ist an nachstehender Rechnung falsch?

$$\left.\begin{array}{l} \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \pm \cdots \\ \frac{1}{2}\ln 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} \pm \cdots \end{array}\right\} +$$

$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \pm \cdots = \ln 2$$

46. Mit Hilfe des Quotientenkriteriums untersuche man die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7} + \ldots$ (b) $\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{10001} + \ldots$

47. Man zeige, dass die Reihe

$$\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \ldots$$

konvergiert und berechne ihre Summe.

48. Ein Sparverein eröffnet bei einer Bank am 1. 7. 2007 ein Konto und zahlt sofort 1.200,- € ein. Außerdem verpflichtet er sich, regelmäßig am Ende jedes dritten Monats weitere 100,- € auf dieses Konto einzuzahlen. Die Bank sichert daraufhin eine Verzinsung von 1% pro Quartal bei vierteljährlicher Abrechnung zu. Auf welchen Betrag ist das Guthaben am 31. 12. 2012 angewachsen?

49. Eine Stiftung beabsichtigt, ab 1999 jeweils am Jahresende den besten Teilnehmer eines Fachhochschullehrganges auszuzeichnen und mit einem Geldbetrag zu unterstützen. Für diesen Zweck soll am 1. 1. 1999 ein Fonds eingerichtet werden, dessen Verzinsung mit 5% p.a. langfristig gesichert ist. Wie hoch muss das Fondsguthaben sein, um daraus jährliche gleich hohe Preise in der Höhe von 1.000,- € (a) auf die Dauer von 15 Jahren, (b) in alle Zukunft zu garantieren?

50. Welchen Grenzwert besitzt die Funktion $f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ für $x \to 1$?

(Anleitung: Erweitern Sie die Funktionsgleichung mit $1+\sqrt{x}$.)

51. Man zeige, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ für $x \to \infty$ den Grenzwert 0 besitzt.

52. Man skizziere den Verlauf der Funktion f: $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ und beweise, dass f(x) an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert besitzt, indem man die beiden Folgen $x_n = 1/(n\pi)$ und $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ betrachtet.

53. Wie verhalten sich die folgenden Funktionen y = f(x) bei Annäherung von x an $x_0 = 4$ von links bzw. rechts? Können Sie $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ angeben? (Skizze)

(a) $y = \dfrac{1}{x-4}$ (b) $y = \dfrac{1}{x^2-16}$ (c) $y = \dfrac{1}{(x-4)^2}$ (d) $y = \dfrac{x-4}{x^2-16}$

54. Man berechne die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+2x+1}{x^3-2x^2+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

55. Man zeige mit Hilfe des Nullstellensatzes, dass die Funktion $y = e^x - 5x + 1$ im Intervall [0,1] sowie im Intervall [2,3] je eine Nullstelle besitzt. Wie können diese Nullstellen näherungsweise berechnet werden?

56. Man skizziere die Graphen der Funktionen

$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = 1/\cos x$, $f_3(x) = \cos^2 x$, $f_4(x) = |\cos x|$, $f_5(x) = \sqrt{|\cos x|}$

im Intervall $[0,\pi]$ und untersuche alle Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

57. Berechnen Sie auf direktem Weg über den Differenzenquotienten die Ableitung der Funktion $f(x) = 3x^2 - 5$ (a) an der Stelle $x_0 = 1$ bzw. (b) an der Stelle x_0.

58. Ein Bewegungsablauf wird durch das Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = 2{,}5t^2 - 3t$ beschrieben (t in s, s in m). Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 4 Sekunden?

59. Welchen Anstieg hat die Tangente an die Kurve $y = (x + 1)/(x - 2)$ in deren Schnittpunkt mit der x-Achse? In welchen Punkten ist der Anstieg gleich -3? Man gebe auch die Gleichungen der entsprechenden Tangenten an.

60. Ein Unternehmer stellt ein Produkt Y unter Verwendung des Produktionsfaktors X her. Dabei stehen ihm drei Produktionsverfahren zur Verfügung, welche die folgende Produktionsfunktion ergeben:

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} & \text{für } 0 \le x \le 10 \\ 3x - 5 & \text{für } 10 < x \le 25 \\ 14\sqrt{x} & \text{für } x > 25 \end{cases}.$$

Man skizziere den Graphen der Funktion y = f(x), bestimme die Durchschnittsproduktion $\overline{y}(x) = y(x)/x$ und die Grenzproduktion $y'(x) = dy/dx$ und interpretiere beide Funktionen.

61. bis 63. Man differenziere nach x:

61. (a) $y = x^4 \ln(x)$ (b) $y = (8x - 15) / (3x^2 + 1)$

62. (a) $y = 5 \exp(-(x+1)^3)$ (b) $y = x\, e^x \sin^2 x$

63. (a) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ (b) $y = \sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}$

64. Bilden Sie die erste Ableitung über die entsprechende Umkehrfunktion:

    (a) $y = \sqrt{x+1}$ (b) $y = \ln x$

65. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen zweimal:

    (a) $y = e^{-0,5x}\cos x$ (b) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (c) $y = 3^{x\cdot\sin x}$

66. Die Bewegung eines Massenpunktes werde durch das Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = t^2 \ln(t + 1)$ beschrieben. Man berechne die Geschwindigkeit $v(t) = ds/dt$ sowie die Beschleunigung $b(t) = d^2s/dt^2$.

67. Für die Funktion $y = x^3 \ln(x)$ berechne man $y(1)$, $y'(1)$, $y''(1)$ und $y'''(1)$.

68. Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Können Sie allgemein einen Ausdruck für die n-te Ableitung angeben?

69. Die komplexwertige Funktion $z(t) = (5 + 4\cos(t)) + j\,(3 + 2\sin(t))$ mit $0 \le t < 2\pi$ beschreibt eine Ellipse in der Gaußschen Zahlenebene. Bestimmen Sie graphisch und rechnerisch alle Punkte der Ellipse mit waagrechten oder senkrechten Tangenten.

70. Gegeben sei die Funktion $z(t) = \cos(2t) + j\sin(t)$. Man stelle den Graphen der Funktion für $0 \le t < 2\pi$ in der Gaußschen Zahlenebene dar. Ferner wähle man drei t-Werte im Intervall $[0,2\pi[$ und ermittle die zugehörigen Kurvenpunkte sowie die Tangentenvektoren an die Kurve $z(t)$.