FH-Studiengang Angewandte Elektronik, WS 2014/15

Übungsaufgaben zur Analysis I

$1+2+3 \ldots + n + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2} + n+1 =$

$n(n+1)+2n+2 = (n+1)(n+2)$

$n^2+3n+3 = n^2+3n+3$

1. Zahlen und Funktionen

1. Man überprüfe die Gleichung

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

zunächst für n = 1,2,3,4,5 und beweise sodann deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen n durch vollständige Induktion.

2. Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1+2+2^2+\ldots+2^{n-1} = 2^n - 1.$$

$2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1$ ✓

3. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge (x_n) mit $x_1 = 1$ und

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 2} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Man berechne x_2, x_3, x_4 und x_5. Ferner beweise man mittels vollständiger Induktion, dass

$$x_n = \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

4. Berechnen Sie die acht Binomialkoeffizienten

$$\binom{7}{k} \quad \text{für } k = 0,1,\ldots,7$$

(a) nach Definition der Binomialkoeffizienten bzw.
(b) mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks.
(c) Wie groß ist die Summe aller acht Koeffizienten?
(d) Geben Sie die Entwicklung für $(a + b)^7$ nach dem Binomischen Lehrsatz an.

5. Man berechne die folgenden Potenzen unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes: (a) 102^4 sowie (b) 99^5.

6. Für die Widerstände $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 5/2\ \Omega$, $R_3 = 1/3\ \Omega$ und $R_4 = 4/3\ \Omega$ berechne man den Gesamtwiderstand R_{ser} bei Serienschaltung und R_{par} bei Parallelschaltung.

7. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

(a) $\frac{x}{3} - \frac{7x}{15} < \frac{x}{5} + 3$
(b) $1 \leq \sqrt{x+3} \leq 5 + \sqrt{3}$

8. Berechnen Sie zur Zeitreihe der Energieintensitäten der europäischen Wirtschaft für die Jahre 1995 bis 2005 (siehe Vorlesung) fünfgliedrige gleitende Durchschnitte (mit $k = 2$), und stellen Sie diese gemeinsam mit den Originaldaten graphisch dar.

9. Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar: $z_1 = 3 + 4j$, $z_2 = -5 + j$, $z_3 = -3j$, $z_4 = [5,\pi/6]$, $z_5 = [1, \pi]$, $z_6 = [3,0]$ und $z_7 = [0,\pi/2]$.

10. Die in kartesischen Koordinaten gegebenen Zahlen z_1, z_2 und z_3 aus Aufgabe 9 sind in Polarkoordinaten umzurechnen. Wie lauten die entsprechenden konjugiert komplexen Zahlen?

11. Bringen Sie die in Polarform vorliegenden komplexen Zahlen z_4, z_5, z_6 und z_7 aus Aufgabe 9 in die kartesische Form und bestimmen Sie die jeweiligen konjugiert komplexen Zahlen.

12. Man berechne:

$$\text{(a) } 1+\frac{1}{j} \qquad \text{(b) } \frac{2-4j}{5+7j} \qquad \text{(c) } \frac{(3+2j)(2-j)}{5+5j}$$

13. Mit dem komplexen Zeiger $z = 1 + 2j$ werden folgende Operationen durchgeführt:

(a) $2z$ (b) jz (c) $\bar{z}$ (d) z/j (e) $|z|$ (f) z^2.

Stellen Sie diese Operationen in der Gaußschen Zahlenebene graphisch dar. Was bedeuten Sie geometrisch?

14. Man bestimme sämtliche Potenzen der komplexen Zahl $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j$ und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene dar.

15. Man überprüfe die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ für die folgenden Zahlenwerte:

(a) $z_1 = 0{,}1 + j$; $z_2 = 3{,}2 - 0{,}1j$
(b) $z_1 = -1 + 2{,}5j$; $z_2 = -4 + 10j$

16. Lösen Sie die Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ und zeigen Sie, dass für die Lösungen stets $z^3 = 1$ gilt.

17. Für $u = 1 + \sqrt{3}\,j$ und $v = -1 + j$ berechne man uv sowie u/v und veranschauliche diese Operationen in der Gaußschen Zahlenebene.

18. Man berechne $(1 + j)^{100}$.

19. Man finde alle fünften Wurzeln von $z = -4 + 3j$. Welches ist der Hauptwert?

20. Wie lauten alle (komplexen) Lösungen der Gleichung

$$z^3 - 3z^2 + (3+j)z = 0\,?$$

21. Von der Gleichung vierten Grades $z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 = 0$ ist eine (komplexe) Lösung bekannt: $z_1 = 1 - j$. Wie lauten die übrigen Lösungen?

22. Man beschreibe das Fallgesetz

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

(s Fallstrecke, t Fallzeit, g Fallbeschleunigung) als Funktion durch Angabe von Definitionsbereich, Wertebereich und Zuordnungsvorschrift und skizziere den zugehörigen Funktionsgraphen.

23. bis 25. Zu den nachstehenden reellen Funktionen gebe man den größtmöglichen Definitionsbereich sowie einen geeigneten Wertebereich an, skizziere den Funktionsgraphen und diskutiere ihre Eigenschaften (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Monotonie):

23. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

24. $f(x) = \dfrac{1}{x - 10}$

25. $f(x) = \sqrt{x - 3}$

26. Man zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ bijektiv ist und bestimme ihre Umkehrfunktion.

27. Man zeichne die Schaubilder der (reellen) Betragsfunktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

sowie der Vorzeichenfunktion

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und diskutiere ihre Eigenschaften.

28. Man skizziere die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a\, e^{bx}$ für verschiedene Werte der Parameter a und b.

29. Zeichnen Sie die Schaubilder zu den Funktionen $y = e^{2x}$ in einfachlogarithmischem (ordinatenlogarithmischem) bzw. $y = x^2$ in doppeltlogarithmischem Maßstab.

(Anleitung: Betrachtet man neben den Variablen x, y die neuen Variablen $u = \lg x$, $v = \lg y$, so versteht man unter einer ordinatenlogarithmischen Darstellung eine graphische Darstellung im (x,v)-Koordinatensystem, unter einer doppeltlogarithmischen Darstellung eine solche im (u,v)-Koordinatensystem.)

30. Bei einem Einschaltvorgang in einem Gleichstromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L und der angelegten Spannung U ändert sich die Stromstärke mit der Zeit t nach dem Gesetz

$$i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Nach welcher Zeit beträgt die Stromstärke $\frac{1}{2}\frac{U}{R}$? Was ergibt sich konkret für R = 25 Ω und L = 1.5 H?

31. Man beweise die Formel

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

zur Umrechnung von Logarithmen verschiedener Basen.

(Anleitung: Man verwende die Rechenregel $\log_a b^c = c \log_a b$ und setze darin statt c den Ausdruck $\log_b c$ ein.)

32. Man skizziere den Verlauf der Wechselspannung $u(t) = 400 \sin(100\pi t - \varphi)$ für $\varphi = 0, \pi/2, -\pi$ in einem (t,u)-Diagramm.

33. Man beweise:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

34. Man überlege, wo die Hyperbelfunktionen sinh x und cosh x eindeutig umkehrbar sind und skizziere die entsprechenden Umkehrfunktionen.

35. Leiten Sie für den Area-Sinus hyperbolicus die folgende Beziehung her:

$$\operatorname{ar\,sinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(Anleitung: Man folgere aus y = ar sinh x die Gleichung $x = \sinh y = (e^y - e^{-y})/2$ bzw. $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$. Das ist eine quadratische Gleichung in $u = e^y$, aus welcher e^y und schließlich y bestimmt werden können.)